Miniprojekt 3 - Kastparabler, projektiler och raketer

Emil Gustafsson, MT1A

Maj 20, 2016

1 Inledning

Denna rapport beskriver hur differentialekvationer för kastparabler, projektiler samt raketer träffar en måltavla. För att leverera matlådor till en skyskrapa. Syftet är att illustrera trunkeringsfel som uppstår när olika metoder används samt hur de olika rörelse ekvationerna fungerar.

2 Metod

Samtliga differentialekvationer[1] som löses numeriskt beräknas och illustreras med hjälp av *matlab.*[2]

2.1 Projektiler

Ekvation (1) och (2) är två stycken andra ordningens ordinära differentialekvationer (ODE) som löstes analytiskt. Det som beskrivs är accelerationen i *x*- samt *y-led* vid en viss tid t hur en projektil åker i en bana med parametern k, luftmotstånd samt konstanterna m, massa och g, som är gravitationskonstanten.

$$\alpha_x = x''(t) = -\frac{k}{m}\, x'(t) \tag{1}$$

$$\alpha_y = y''(t) = -\frac{k}{m}\, y'(t) - g \tag{2}$$

Lösningen på dessa ODE beskriver x samt y-positionen vid tiden t som bestäms av begynnelsevärden.

$$x(0) = 0\,,\ y(0) = 0 \tag{3}$$

$$x'(0) = v_0 \cos(\theta)\ ,\ y'(0) = v_0 \sin(\theta) \tag{4}$$

Förutsättningar är att projektilen börjar vid tiden $t = 0$, V_0 är begynnelse hastigheten *m/s* samt en vinkel θ som är angiven i radianer. *Se (3) och (4).*

Genom att analytiskt lösa ekvation (1) och (2) med hjälp av karakteristiska ekvationer samt att (2) löses genom en ansats med $y_p = Ax$. Detta ger lösningarna (5) och (6).

$$x(t) = \frac{v_0\cos(\theta)}{k/m} - \frac{v_0\cos(\theta)}{k/m} e^{-\frac{k}{m}t} \tag{5}$$

$$y(t) = \frac{mv_0\sin(\theta)}{k} + \frac{gm^2}{k^2} - \left(\frac{mv_0\sin(\theta)}{k} + \frac{gm^2}{k^2}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}t \tag{6}$$

Ekvationerna (5) och (6) användes sedan för att träffa en måltavla med fyra hörnpunkter, (40,30), (50,30), (50,40), (40,40). Projektilen skjuts iväg med avseende på ett linjärt luftmotstånds konstanter, k = 0.01 kg/s, k = 0.5 kg/s och k = 3 kg/s. Målet var att träffa måltavlan ovanifrån med korrekta konstanter på begynnelse hastigheten v_0 samt vinkeln θ. I samtliga fall var massan $m = 5kg$ och gravitationskonstanten $g = 9{,}82\ m/s^2$.

2.2 Jämförelse av analytisk och numerisk lösning

Metoder som användes för att lösa uppgiften numerisk är två algoritmer, *Eulers metod*[1], Runge-*Kutta av ordning 4*[1] samt *matlabs* egna metod *ode45.*[2] Innan implementation av ekvation (1) och (2) skrevs dessa om till differentialekvationer i första ordningen detta för att kunna lösa de numeriskt. Trunkeringsfelet fås genom att ta absolutbeloppet av den numeriska lösningen subtraherat med den analytiska lösningen.

2.3 Projektil med raketmotor

Med hjälp av de numeriska metoderna är det möjligt att göra en approximerad uppskattning för en raketdriven-projektils bana med ett minimalt trunkeringsfel. Förutsättningarna var att en raket förbränner bränsle i fem sekunder och efter det faller fritt. Det ska då träffa en måltavla med hörnpunkterna (60,130), (70,130), (70-,140), (60,140). Differentialekvationerna som användes var (7) och (8).

$$x''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + y'^2}\ x' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t) \tag{7}$$

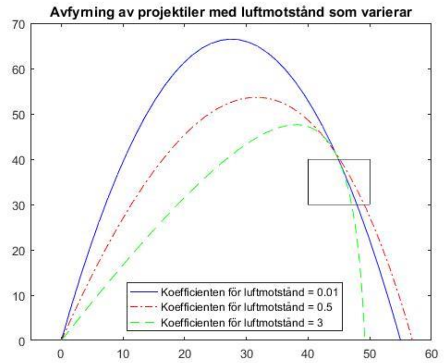
$$y''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + y'^2}\ y' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g \tag{8}$$

Där c = 0.05 *kg/m* är luftmotstånd som kvadratiskt proportionell mot farten. $u_x(t)$ och $u_y(t)$ är raketens hastighet 700 *m/s* samt riktning över tiden. *m(t)* är massan som förändras då bränslet förbränns med begynnelsevärdet 5 *kg*, bränslets massa är på 1 *kg* och förbränner 0.2 *kg/s*. Begynnelsehastigheten är $v_0 = 0$.

3 Resultat

3.1 Illustration av projektil i 2.1

Vid första projektilen när $k = 0.01$ användes vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2{,}3}\ rad$ samt $v_0 = 37$ m/s. Vid andra projektilen när $k = 0.5$ användes vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2{,}5}\ rad$ samt $v_0 = 38$ m/s och vid tredje projektilen när $k = 3$ användes vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}\ rad$ samt $v_0 = 60$ m/s. Resultatet blev då enligt *fig. (1).*



Analytisk lösning med linjärt luftmotstånd *fig. (1)*

3.2 Resultat av Jämförelsen i 2.2

En graf som visar en sammanställning av de olika ODE-lösarna med respektive lösares avvikelse ifrån den analytiska lösningen. Felet visas i *y-led* utöver en tid. Detta görs i en logaritmisk skala. *Se fig.(2).*

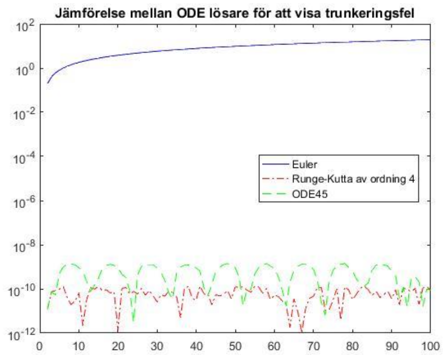
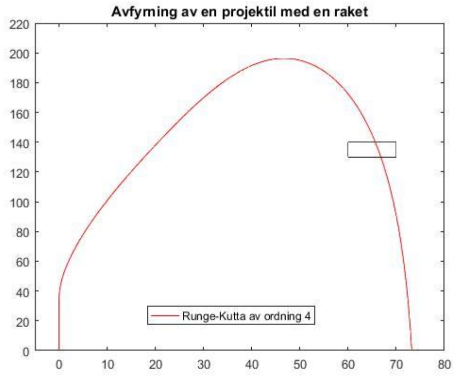


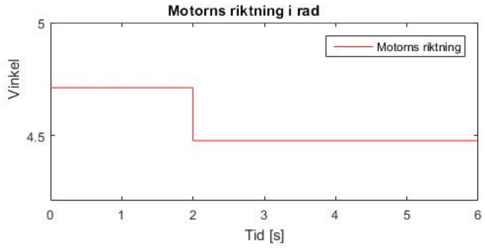
Illustration för att visa trunkeringsfel *fig. (2)*

3.3 Illustration av projektil med raketmotor i 2.3

Den raket som sitter fäst på projektilen har utblås vid $\frac{3\pi}{2}\ rad$ vilket är rakt ner, som efter två sekunder övergår till $\frac{2.82\pi}{2}$ rad. *Se fig. (3) och fig. (4).*



Avfyrning av en raket med olika metoder *fig. (3)*



Motorns riktning som anges i radianer *fig. (4)*

4 Diskussion/ Slutsats

Det går att dra som slutsats att när det linjära luftmotståndet är högre kommer projektilen inte att färdas lika högt innan den börjar falla. Detta är logiskt då mer motstånd resulterar i att den inte färdas lika högt eller långt. *Se fig. (1)*.

Det går även att dra en slutsats vid undersökning om ODE lösare, då framgick det att *Eulers metod* avviker sig mest ifrån den analytiska lösningen, vilket beror på att den algoritmen gör endast en funktionsevaluering istället för *Runge-Kutta av ordning 4* som gör fyra funktionsevalueringar i varje steg. *Se fig. (2)*

Det som framgår efter analys av graferna är att projektilen får ett fritt fall på ca 60 meter, vilket realistiskt sätt skulle förstöra matlådorna som skjuts upp. Lösning till detta skulle kunna vara en svagare raketmotor med en mindre vinkel eller en väldigt stark raketmotor och en vinkel rakt upp, likt en JET pack.

5 Referenser

[1] Berkant, S. (2016). *Projektbeskrivning TNA005.* Norrköping: LIU.

[2] Jönsson, P. (2010). *MATLAB beräkningar inom teknik och naturvetenskap.* Malmö: Studentlitteratur AB.